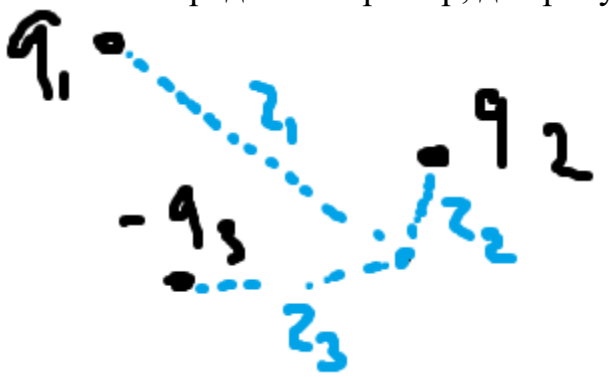
Предисловие.
1)Функция Грина – достаточно сложная тема. После долгих раздумий автор понял, что лучше всего вводить функцию Грина как способ решить уравнение Пуассона.
Кафмат вводит функцию Грина для решения уравнения Лапласа, что как раз, на мой взгляд, приводит к непониманию физического смысла функции Грина.
2) То, что я называю N, у кафмата M_0.
3) В данной методичке вы не увидите дельта-функций. Потому что противные.

Как выглядит функция Грина?
Это функция двух точек (т.е. 4 переменных в двумерном случае и 6 переменных в трёхмерном). Традиционно обозначается как $G(M, M_0)$, у меня будет $G(M,N)$.

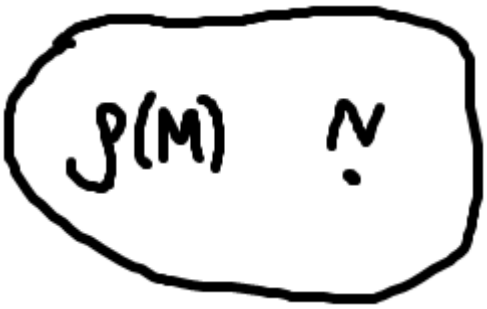
Нафига она нам нужна?
Да много для чего. Но чтобы понятнее, откуда она вообще взялась, вот вам одна причина: она помогает решать уравнение Пуассона
$\Delta u(N)=4\pi\rho(N)$.
Т.е. лапласиан в каждой точке N равен некоей известной функции.
Заметим, что уравнение Пуассона сложнее, чем уравнение Лапласа. Все наши любимые методы вроде «разделить переменные» и «разложить по СФ» терпят сокрушительный провал. Нужно изобретать что-то новое.

На помощь приходит физическая аналогия.
Мы знаем потенциал от точечного заряда – q/r. Знаем потенциал системы точечных зарядов. Например, для рисунка



Потенциал в точке наблюдения будет q1/r1+q2/r2-q3/r3.

А что делать, если заряд распределённый, с объёмной плотностью ρ(M), которая в каждой точке M своя



И от нас по-прежнему хотят потенциал в точке наблюдения N?
По сути от нас как раз хотят получить решение уравнения Пуассона $\Delta u(N)=4\pi\rho(N)$. Что мы делаем? Следите за руками:
Разбиваем область на маленькие кусочки, в пределе их будет бесконечно много. Каждый из них имеет заряд $\rho(N)dV(N)$ ($dV(N)$ – бесконечно малый объём в окрестности N).
Потенциал в точке M от каждого кусочка, содержащего точку N - $\rho(N)dV(N)/R_{MN}$
И далее берём интеграл по всем таким кусочкам:

$$\varphi_{\text{в точке } N} = \iiint_V \frac{\rho(M)\,dV(M)}{R_{MN}}$$

Это всё касается 3D, в 2D формула будет чуть другой:

$$\varphi_{\text{в точке } N} = \iint_S \rho(M)\,dS(M)\ln\frac{1}{R_{MN}}$$

(только там исходное уравнение будет уже $\Delta u(M)=2\pi\rho(M)$).
Их можно объединить в одну:

$$\varphi(N) = \iiint_V \rho(M)\,G(M,N)\,dV(M)$$

Где $G(M,N)=1/R_{NM}$ в 3D и $\ln(1/R_{NM})$в 2D.

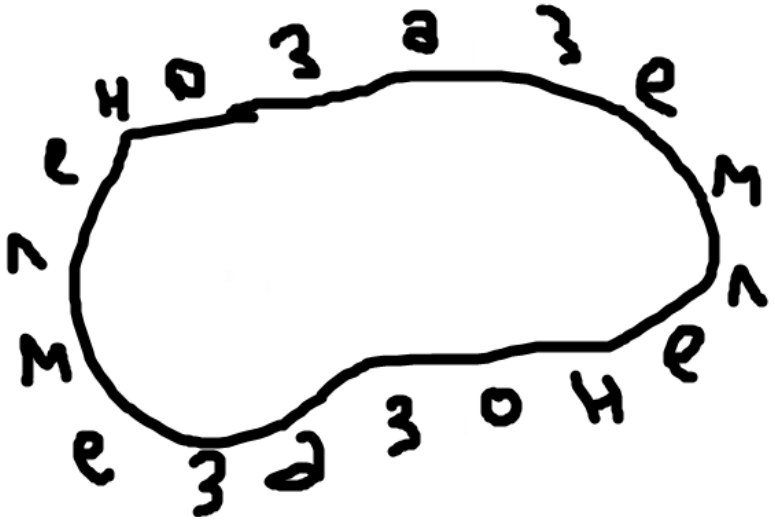
В физике такой способ записи решения называется **принципом суперпозиции**.

Замечание. Математики ещё дописывают к G константы: $1/(4\pi)$ в 3D и $1/(2\pi)$ в 2D. Это связано с тем, что они решают уравнение $\Delta u(N)=\xi(N)$, а у нас в 3D $\xi(N)=4\pi\rho(N)$, в 2D $\xi(N)=2\pi\sigma(N)$.
И решение они через $\xi()$ записывают:

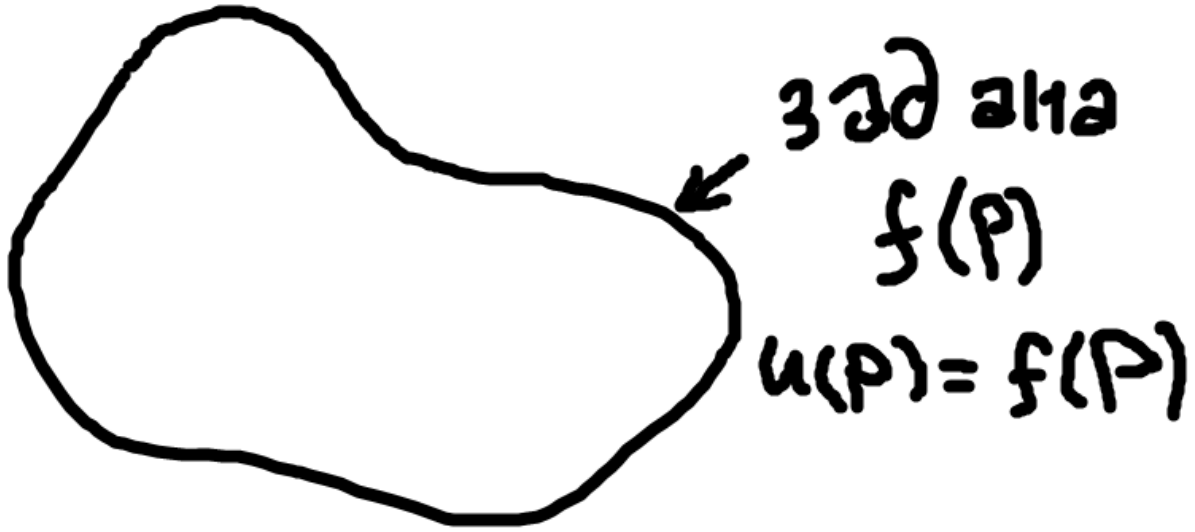
$$\varphi(N)=\iiint_V \xi(M)\,G(M,N)\,dV(M)$$

Тогда в функцию Грина действительно надо включить коэффициент.
В общем, это дело вкуса, где вылезет 2π или 4π.

Ну что, я надеюсь, с этим разобрались.
Хорошо, а что делать, если есть граничные условия, которых раньше не было?
Раньше у нас была область, где была объёмная плотность $\rho(M)$, и мы искали там потенциал. А теперь мы добавим ещё ГУ. Например, ГУ 1 рода $u|_{\text{на границе}}=0$ имеют физический смысл – на границе у нас заземление.

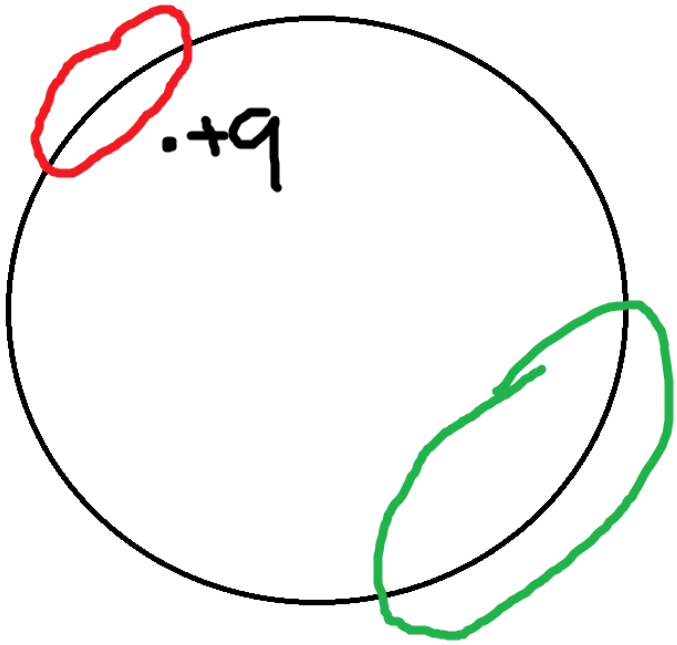


Неоднородные ГУ 1 рода (на границе $u(P)=f(P)$)



– это если бы мы в каждой точке поверхности приставили бы контакт ЭДС напряжением f(P). Таким бы образом мы задали потенциал на границе поверхности.

В чём проблема? Представим себе полую металлическую сферу, внутри которой внутри НЕ в центре находится точечный заряд:



Если бы потенциал всегда бы распространялся как 1/r, то в красной и зелёных областях он был бы разный. Но он должен быть одинаковым!

Вывод: при наличии нетривиальных граничных условий вся идиллия с 1/r. На этом моменте заметим, что пока наших знаний не хватает, чтобы решить задачу. Забегая вперёд, скажу, что решение снова можно будет записать как

$$\varphi(N) = \iiint_V \xi(M)\, G(M,N)\, dV(M)$$

Но уже G(M,N) не будет равна $\frac{1}{r_{NM}}$.

А почему будет равна – узнаем в следующей методичке.